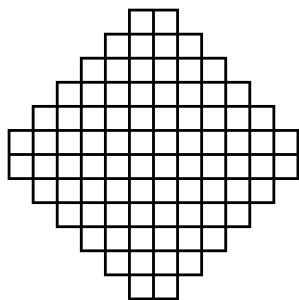


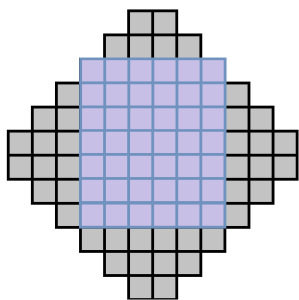
# Алгоритм вычисления количества замощений доминошками прямоугольника

Рассмотрим на примере прямоугольника  $6 \times 7$ .

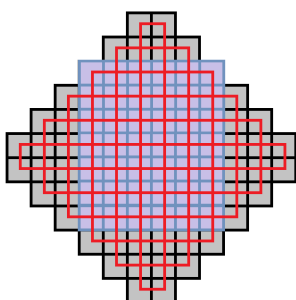
1 Сначала находим ранг ацтекского диаманта, в который можно поместить прямоугольник. Главное при этом, чтобы оставшаяся часть диаманта можно было разбить на домино хотя бы одним способом. Заметим, что если мы найдем минимальный ранг диаманта, такого, что прямоугольник в него помещается, то оставшаяся часть можно будет замостить доминошками (видно из рисунков ниже).



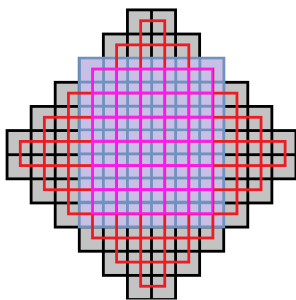
2 Найдем точку, которая будет являться левым верхним углом прямоугольника и поместим его в диамант.



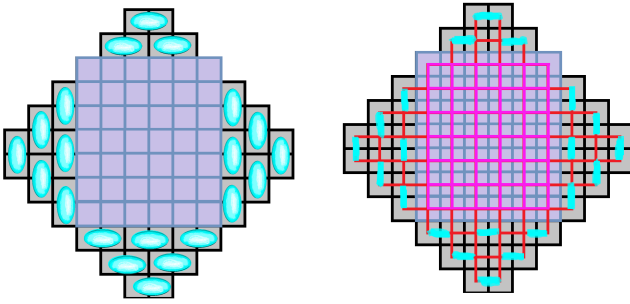
Рассмотрим граф, вершинами которого являются клетки, и две вершины соединены ребром, если у них есть общая сторона. На рисунке он изображен красными линиями.



Ту часть графа, которая является графом также и прямоугольника, обозначим на рисунке фиолетовыми линиями.



3 Расставим доминошки в той части ацтекского диаманта, которая не принадлежит прямоугольнику. На рисунке это бирюзовые ребра.



4 Припишем каждому ребру вес:

если ребро соединяет две клетки прямоугольника, то его вес равен 1;

если ребро соединяет клетку прямоугольника и клетку оставшейся части алмаза, то его вес равен 0;

вес бирюзовых ребер равен 1;

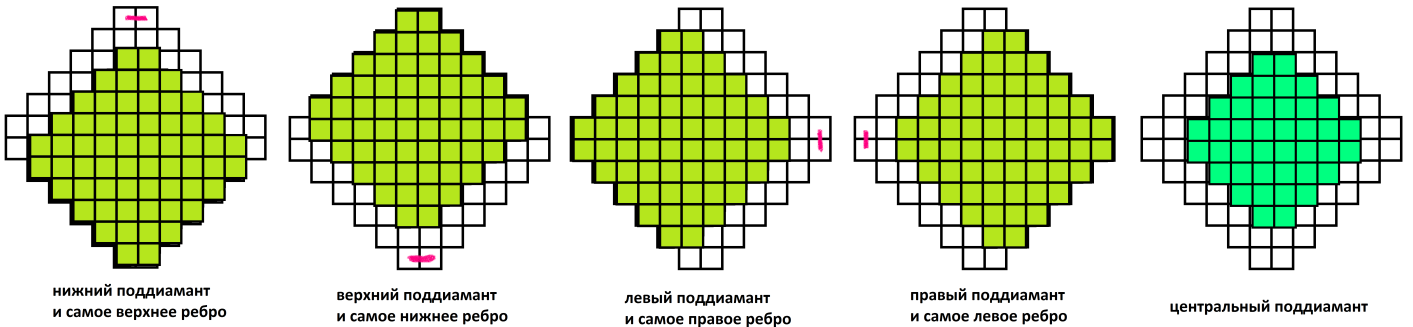
вес всех оставшихся ребер равен 0.

Определим вес паросочетания как вес всех входящих в него ребер.

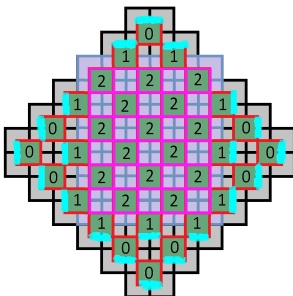
Заметим, что при таком распределении весов ребер количество замощений прямоугольника, встроеного в алмаз, равно сумме весов всех возможных паросочетаний на графе азтекского алмаза, а эту сумму можно посчитать, воспользовавшись следующей теоремой:

$$W_n \cdot W_c = l \cdot r \cdot W_u \cdot W_d + u \cdot d \cdot W_l \cdot W_r, \quad (*)$$

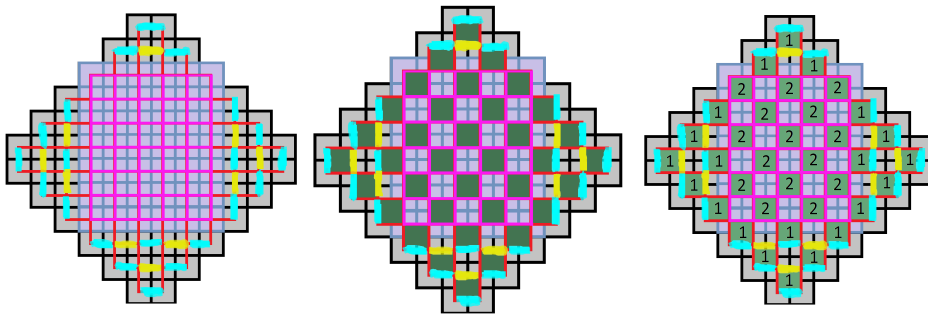
где  $l$ ,  $r$ ,  $u$  и  $d$  — веса самого левого, самого правого, самого верхнего и самого нижнего ребра в алмазе соответственно,  $W_n$  — алмаз, вес которого мы ищем,  $W_l$ ,  $W_r$ ,  $W_u$ ,  $W_d$  и  $W_c$  — левый, правый, верхний, нижний и центральный подалмазы алмаза  $W_n$  (изображены на рисунке ниже). Теорема аналогична лемме для прямоугольника, которую доказывали на доске, и лемме, которая изложена в решении задачи про шестиугольник, только здесь появляются веса ребер.



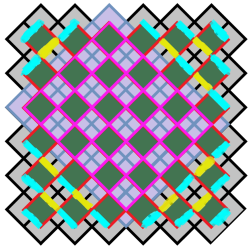
Раскрасим в шахматном порядке клетки графа азтекского алмаза. Для каждой черной клетки посчитаем ее вес по формуле  $w = ud + lr$ , где  $l$  и  $r$  — левое и правое ребра, а  $u$  и  $d$  — верхнее и нижнее. На рисунке черные клетки показаны темно-зеленым.



Весы некоторых клеток получились при этом равными нулю, они могут помешать работе алгоритма, так как в формуле  $(**)$ , которую мы выведем из формулы  $(*)$ , может возникнуть деление на 0. Поэтому введем дополнительные ребра. Они показаны желтым. Тогда сумма количества всех возможных паросочетаний графа алмаза, которое мы ищем, не изменится, так как в любом случае эти ребра не будут взяты ни в одно из совершенных паросочетаний. Зато веса клеток после этого все станут положительными.



5 Потом повернем диамант на  $45^\circ$  для удобства вычислений.



6 Составим из полученных значений матрицу  $A^{(r)}$ . Заведем дополнительную матрицу  $A^{(r+1)}$ , положим все ее значения равными 1. Будем преобразовывать матрицы по рекурсивной формуле для элемента строки  $i$  столбца  $j$ :

$$A_{ij}^{(r)} = \frac{l \cdot r \cdot A_{i,j}^{(r+1)} \cdot A_{i+1,j+1}^{(r+1)} + u \cdot d \cdot A_{i+1,j}^{(r+1)} \cdot A_{i,j+1}^{(r+1)}}{A_{i+1,j+1}^{(r+2)}}, \quad (**)$$

на каждом шаге уменьшая ранг диаманта  $r$  и получая матрицу меньшего размера. Когда ранг станет равным 1, то это и есть ответ. Формула  $(**)$  является другой записью формулы  $(*)$ . На рисунке ниже показан процесс преобразования матриц.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 8 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 22 & 48 & 22 & 1 \\ 48 & 64 & 56 & 16 \\ 22 & 56 & 56 & 16 \\ 1 & 16 & 16 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 464 & 512 & 68 \\ 512 & 840 & 224 \\ 68 & 224 & 52 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10186 & 3068 \\ 3068 & 1676 \end{pmatrix} \rightarrow 31529$$

## Список литературы

- [1] К. Кохась. Разбиения на домино, Математическое просвещение, 2005, выпуск 9, стр. 143–163. <http://www.mathnet.ru/rus/mp171>
- [2] К. Кохась. Разбиение ацтекских диамантов и квадратов на домино, Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2008, т. 360, стр. 180–230. <http://www.mathnet.ru/rus/zns12165>
- [3] James Propp. Generalized domino shuffling. <http://arxiv.org/abs/math/0111034> (Статья, в которой в частности можно найти другое доказательство леммы о количестве способов разбить на доминошки ацтекский диамант, основанное на теории графов)